

POJEM “RELATIVNOST” IN IZBRANE VSEBINE

zf42

KAZALO

1. Pojem “relativnost”	1
1.1. Sprememba dolžine palice	3
1.2. Sprememba “dolžine” časa	4
1.3. Pojem “interval”	4
2. Prostornina vesolja	7
3. Načelo energije	12
4. Lagrangeove generalizirane enačbe	15

1. POJEM “RELATIVNOST”

Naj se točka giblje vzdolž osi x . Hitrost te točke v mirnem sistemu S je \dot{x} , v sistemu S' , ki se giblje s hitrostjo v , pa je njena hitrost

$$\dot{x}' = \dot{x} - v.$$

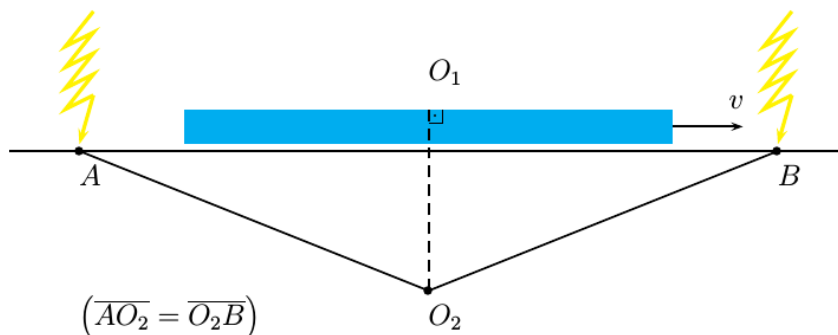
Vidimo: Galilejeva transformacija in vektorsko seštevanje hitrosti sta eno in isto.

Mirujoč sistem ima koordinati x in t (čas), sistem v gibanju pa x' in t' .

Velja:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{in} \quad t' = t.$$

Einstein je **podvomil** v resnico (= čas je absoluten $\Rightarrow t' = t$)!
Zakaj?



SLIKA 1.

Zamislamo si vlak, ki se giblje s hitrostjo v , kot kaže slika 1. Dve strelji zadaneta točki A in B **istočasno** za opazovalca v točki O_2 (mirujoči sistem), kar pa ni istočasno za opazovalca v točki O_1 (sistem v gibanju). Slednji dobi informacijo, da se je dogodek v točki B zgodil pred dogodkom v točki A. Sklep: **Istočasnost izgine kot posledica gibanja**. "Istočasno" v enem sistemu NI istočasno v drugem sistemu. Einstein zato ovrže misel o absolutnem času ($t'=t$). Kolikšno ceno pa plača? Avreolo absolutnosti prevzame **konstantnost svetlobne hitrosti**. V vsakem sistemu, neodvisno od stanja gibanja, je svetlobna hitrost **vselej eno in isto**. Torej: Gibajočemu in mirujočemu opazovalcu svetloba ubeži vedno z enako hitrostjo. Ali se tvoj duh temu upre? Ne! Vse kaže, da ti narava sporoči, da si norec, če ne spremeniš pravil igre z njo! Kaj pa bi sploh spremenil? **Prvič**: Svetloba ni proces nekega fizikalnega procesa v prostor-času. **Drugič**: Svetloba je neko obanašanje samega prostora-časa. In prav to je pogoj ohranitve matematične oblike vseh fizikalnih zakonov ne glede na izbiro koordinatnega sistema.

Torej: Galilejeve transformacije spreminjamo

$$x' = x - vt \rightarrow x' = k(x - vt) \quad (1)$$

$$x = x' + vt' \rightarrow x = k(x' + vt'), \quad (2)$$

pri čemer je k faktor spremembe. "Širjenje" svetlobe v enem sistemu določa enačba $x = ct$, v drugem pa $x' = ct'$. Kostanta c je torej, ne glede na sistem, eno in isto. Tako drži

$$\left. \begin{array}{l} ct' = k(ct - vt) \\ ct = k(ct' + vt') \end{array} \right\} \Rightarrow c^2 tt' = k^2 tt' (c^2 - v^2),$$

od koder sledi

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

V enačbo (2) vstavimo x' iz enačbe (1)

$$x = k[k(x - vt) + vt'] \Rightarrow t' = k \left[t + \frac{x}{v} \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) \right],$$

tako dobimo Lorentzove transformacije:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

ali

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4)$$

Kaj nam vse to pove? V določenem trenutku imajo v mirujočem sistemu **različne točke v gibajočem sistemu različne informacije o času**. Iz enačb (3) vidimo: ura v gibajočem sistemu se mora pomikati nazaj ob gibanju naprej v smeri x . Absolutna istočasnost je izginila.

Posledice:

1.1. Sprememba dolžine palice

Oglejmo si palico dolžine l' v sistemu $S'(x', t')$. Njena začena koordinata naj bo x'_0 in končna $x'_0 + l'$. V sistemu S je ob času t palica med koordinatama x_0 in $x_0 + l$. Imamo

$$x'_0 = \frac{x_0 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'_0 + l' = \frac{x_0 + l - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5)$$

od koder sledi

$$l = l' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (6)$$

Torej: Palica, ki se giblje s hitrostjo v , se zdi mirujočemu opazovalcu skrajšana za faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Vidimo tudi: Mirujoči opazovalec vzame dolžino za lastno istočasnost. Za gibajočega opazovalca, je mirujoči opazovalec vzel sprednjo točko palice v zgodnejšem času in si zato razlaga, zakaj se zdi mirujočemu opazovalcu palica "skrajšana".

1.2. Sprememba "dolžine" časa

Zastavimo si vprašanje: Kako "dolgo" traja proces, ki se dogaja v neki točki x'_0 sistema S' , za mirujočega opazovalca? Vzemimo interval $t'_1 \rightarrow t'_2$, ki ima v mirujočem sistemu S vrednost

i

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{iz relacije (4)}). \quad (7)$$

To pomeni: Ena sekunda v S' je "razširjena" za opazovalca v sistemu S . Torej: **Čas se v gibanju upočasni! Ura to potrdi!**

1.3. Pojem "interval"

Na trajektoriji gibanja svetlobe velja:

$$0 = dt^2 c^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (8)$$

in to dejstvo sugerira: razmik med dogodkoma v strukturi prostor-čas (ko gre za objekt materije) je

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (9)$$

ali

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (10)$$

kjer sta ds prostorski interval in $d\tau$ časovni interval. Razmiku ds pravimo **lastna razdalja**, časovnemu intervalu $d\tau$ pa **lastni čas**.

Bistvo je v naslednjem: interval ima ali prostorsko ali časovno naravo, koordinate pa so lahko imaginarne (če zamenjamo mesta seštevkov z desne).

Bistvo bistva pa je: INTERVAL JE INVARIANTA (ni odvisen od koordinatnega sistema).

To ponazorimo! Vzdolž osi x sta $y = 0$ in $z = 0$. Taka poenostavitev ne upliva na splošni sklep. Torej vzamimo

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \quad (11)$$

in vstavimo diferencialne iz relacije (4). Dobimo

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 \gamma^2 \left(dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right)^2 - \gamma^2 (dx'^2 + 2v dx' dt' + v^2 dt'^2) = \\ &= \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dt'^2 - \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dx'^2 = \\ &= c^2 dt'^2 - dx'^2, \end{aligned} \quad (12)$$

kjer je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (13)$$

Relaciji (11) in (12) soglašata:

1. OBLIKA INTERVALA SE PO SPREMEMBI SISTEMA NE SPREMINJA
2. VSAK KOORDINATNI SISTEM IMA V POSESTI LASTNI PROSTOR IN LASTNI ČAS
3. PROSTOR IN ČAS STA RELATIVNA, KRALJICA RELATIVNOSTI PA JE HITROST SVETLOBE

To je vsebina **posebne relativnostne teorije** (special theory of relativity).

Omejitev teorije: **materija je odsotna!**

Posplošitev teorije: **materija je prisotna!**

Kaj prinese posplošitev?

1. VSAKA TOČKA IMA V POSESTI LASTNI PROSTOR IN LASTEN ČAS
2. ENAČBE FIZIKALNEGA POLJA

$$\begin{pmatrix} \text{LASTNOST} \\ \text{PROSTOR} - \text{ČASA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ENERGIJA} - \text{IMPULZ} \\ \text{MATERIJE} \end{pmatrix} \quad (14)$$

↓

↓

GEOMETRIJA

FIZIKA

povedo: fizika sporoči geometriji kako naj se zakrivlja in krivina prostor-časa sporoči materiji kako naj se obnaša.

V tem je vsebina **splošne relativnostne teorije** (general theory of relativity).

Metrika prostor-časa je tokrat v najbolj splošni obliki

$$ds^2(x) = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}(x)dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta, \quad (15)$$

kjer je $x \equiv x^0, x^1, x^2, x^3$, in $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Splošna relativnostna teorija največ doseže z ortogonalno metriko v kateri je

$$g_{0\alpha} = 0. \quad (16)$$

Takrat metriko določi oblika

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (17)$$

kjer sta $i, k = 0, 1, 2, 3$.

Teoretična kozmologija začne z ortogonalno metriko v sferičnih koordinatah

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r,t)} dt^2 - \left\{ e^{\mu(r,t)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\} \quad (18)$$

in postavi pogoja $\nu = 0$ in $\mu = \mu(r)$, ki spremljata kozmični čas na sferi $r = \text{const.}$ **prasevanja** (background radiation). Tako nas s pomočjo enačbe (14) pripelje do oblike, ki ji rečemo **Robertson-Walkerjeva** metrika

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{d\sigma^2 + \sigma^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{\left[\left(1 + \frac{k}{4}\right) \sigma^2 \right]^2} \right\}, \quad (19)$$

kjer je $\sigma = \frac{r}{r_0}$, pri čemer je $r = r_0$ začetna vrednost ekspanzirajoče koordinate.

Dejstvo, da **tukaj** o osnovni enačbi (14) **ne vemo nič**, nas **ne moti**, kajti naš cilj je **prostornina hipersfere vesolja** in prostorninski delež metrike iz (19) **smo usposobljeni** doseči. Torej! Nadaljujmo naprej iz tistega kar smo izvedeli!

2. PROSTORNINA VESOLJA

Vesolje se začne v singularnosti (ni končna), če je faktor skale širjenja $R(t)$ neka sinusna funkcija strukture ξ ; $t(\xi)$:

$$R(t(\xi = 0)) = 0, \quad R(t(\xi = \pi)) = 0. \quad (20)$$

Tako končnost prostora zagotovita pogoja:

- (i) koordinata σ se giblje med 0 in ∞ ;
- (ii) hipersferični kot y se giblje med 0 in π ,

ki sta združena v relacijah

$$\sigma = \tan \frac{y}{2}, \quad \sin y = \frac{\sigma}{1 + \frac{\sigma^2}{4}}, \quad dy^2 = \frac{d\sigma^2}{(1 + \frac{\sigma^2}{4})^2}. \quad (21)$$

Kaj se nam obeta?

Interval (9) lahko zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \\ &= \zeta_{00}c^2dt^2 + \zeta_{11}dx^2 + \zeta_{22}dy^2 + \zeta_{33}dz^2, \end{aligned} \quad (22)$$

kjer je

$$\zeta_{00} = 1, \quad \zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{33} = -1 \quad (23)$$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = ix, \quad x^2 = iy, \quad x^3 = iz \quad (24)$$

oziroma

$$\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Pojdimo naprej. Če matrika (25) vsili hipersferi koordinate (24), potem drži še

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2 \quad (26)$$

oziroma

$$x^0 dx^0 + x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 = 0. \quad (27)$$

Eliminacijam dx^0 v (22) sledi

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 + \frac{\left[d \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \right]^2}{4(x^0)^2}. \quad (28)$$

Sferične koordinate iz transformacij

$$x^1 = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad x^2 = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad x^3 = \rho \cos \theta \quad (29)$$

to prevajajo v obliko

$$ds^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (30)$$

kjer smo si pomagali z relacijo

$$(x^0)^2 = R^2 - \rho^2. \quad (31)$$

Do popolnega presenečenja pride po koordinatni substituciji

$$\rho = \frac{\sigma R}{1 + \frac{1}{4}\sigma^2}, \quad (32)$$

ko metrika (30) zavzame obliko

$$\frac{1}{137} \quad ? \quad (33)$$

$$ds^2 = R^2 \left\{ \frac{d\sigma^2 + \sigma^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{(1 + \frac{1}{4}\sigma^2)^2} \right\} \quad (34)$$

v popolnem soglasju s prostorsko obliko Robertson-Walkerjeve metrike (19) za krivino $k = 1$, ki pomeni zaprti prostor v še enem soglasju s pogoji (21), nakar drži

$$ds^2 = R^2 \left\{ dy^2 + \sin^2 y (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\}. \quad (35)$$

Sedaj se pojavi problem: Kaj je prostornina (po tej metriki) tako zaprtega prostora? Ali je to prostornina vesolja?

♣ ♠ ♣

Preden odgovorimo, še malo matematike!

♣ ♠ ♣

Oglejmo si spremembo koordinat x^i v \bar{x}^i . Metrični tenzor g_{ik} se pri tem transformira po zakonu

$$\bar{g}_{ik} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} g_{\alpha\beta}. \quad (36)$$

Posledično se, po uporabi pravila za produkt matrik, determinanta g transformira kot

$$\bar{g} = g \left(\det \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^i} \right)^2 \quad (37)$$

ali

$$\sqrt{-\bar{g}} = \sqrt{-g} \left| \frac{\partial(x^1, x^2, \dots)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots)} \right|, \quad (38)$$

zaradi izbire pozitivne vrednosti kvadratnega korena. Diferencial elementa prostornine se potem transformira kot

$$d\bar{V} = \left| \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots)}{\partial(x^1, x^2, \dots)} \right| dV, \quad (39)$$

iz česar izhaja

$$\sqrt{|g|} dy d\theta d\varphi = R^3 \sin^2 y dy d\theta d\varphi . \quad (40)$$

Odtod sledi prostornina sfere, ki se širi od $y = 0$ do y_0 ,

$$\begin{aligned} V(y_0) &= 4\pi R^3 \int_0^{y_0} \sin^2 y dy = \\ &= 4\pi R^3 \frac{2y_0 - \sin 2y_0}{4} \end{aligned} \quad (41)$$

ali

$$V(\pi) = 2\pi^2 R^3 , \quad (42)$$

kar je prostornina zaprtega vesolja: kot hipersfera je takšno vesolje **končno**, čeprav **brez mej**.

Intuitivno spoznanje ima za vsebino vedno neko preprostost. Poskus to potrdi ali zavrže. Če potrdi, potem odpira možnost: posplošitev preprostega se prelevi v poglobitev, ki spelje dvig intuitivnega na raven racionalnega spoznanja. Šele takrat je resnična vrednost v naši lasti.

Kaj štejemo kot vsebinsko preprostost? Gibanje, stanje ali energija so na začetku pod kontrolo elementarnega opisovanja. V nazornost opisa vpeljemo pojem "koordinat". Kaj je potem poseg "posplošitev"? Lahko si mislimo:

- (i) pojem "transformacija" se zaplete, ko namesto "ravnega" vpeljemo "ukriviljeno";
- (ii) pojem "razsežnost" se spremeni, ko predstavljaljivost dimenzij zamenjamo s poljubnim številom dimenzij;

...

3. NAČELO ENERGIJE

Gravitacijska sila nam je znana:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}; \quad m_1, m_2 = \text{masi}. \quad (43)$$

Po Coulombu ohranita električna in magnetna sila obliko:

$$F = \frac{e_1 e_2}{r}; \quad e_1, e_2 = \text{električna naboja} \quad (44)$$

ali v vektorski obliki

$$\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (45)$$

oziroma po komponentah

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{e_1 e_2}{r^2} \frac{x}{r} \\ F_y &= \frac{e_1 e_2}{r^2} \frac{y}{r} \\ F_z &= \frac{e_1 e_2}{r^2} \frac{z}{r}. \end{aligned} \quad (46)$$

Vpeljemo skalarni funkciji

$$\varphi = \frac{e_1 e_2}{r}, \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

in zlahka preverimo

$$\begin{aligned}
 F_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\
 F_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\
 F_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

Zlahka potrdimo, da velja enako tudi za **elastično silo** prostorsko harmoničnega oscilatorja. Tukajle vpeljemo skalarno funkcijo

$$\varphi = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)
 \tag{49}$$

in dobimo

$$\begin{aligned}
 F_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -kx \\
 F_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -ky \\
 F_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -kz.
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

Zdaj dokažemo, da se funkcija φ ujema s potencialno energijo. Izhajamo iz dela A (iz nemščine "Arbeit"), ki je skalarni produkt sile \vec{F} in vektorja $d\vec{r}$ premika iz točke P_1 v točko P_2 :

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} =
 \tag{51}$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz
 \tag{52}$$

ali

$$A = - \int_{P_1}^{P_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \quad (53)$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right), \quad (54)$$

kjer je

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad (55)$$

totalni diferencial funkcije φ . Delo je odtod

$$A = \int_{P_1}^{P_2} d\varphi = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) \quad (56)$$

določeno kot **razlika potencialnih energij**.

Za sile, ki se lahko izpeljejo iz skalarne funkcije drži **načelo energije**.
Enačbe gibanja za **delec mase m** so:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (57)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Enačbe po vrsti zmnožimo z $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ in $\frac{dz}{dt}$, nato jih seštejemo in dobimo

$$m \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} \right) = \quad (58)$$

$$= - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \quad (59)$$

in zapišemo

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = - \frac{d\varphi}{dt} \quad (60)$$

oziroma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \varphi \right) = 0 \implies \frac{1}{2} m v^2 + \varphi = \textit{konstanta} ,$$

kjer je

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \textit{kinetična energija}$$

$$E_p = \varphi = \textit{potencialna energija} .$$

Sklep:

$$E = E_k + E_p = \textbf{konstanta ohranitve energije}$$

4. LAGRANGEOVE GENERALIZIRANE ENAČBE

Vpeljemo splošne koordinate $q \equiv (q_1, q_2, q_3)$, ki jih vrinemo v sistem enačb (57). Za te koordinate velja: prejšnje koordinate x , y , z so funkcije "novih" koordinat q_1 , q_2 , q_3 . Torej! Zapišemo

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

in si zapomnimo: vsaki točki s koordinatami x, y, z vsilimo tri splošne koordinate q_1, q_2, q_3 . Odtod se vsako gibanje z lahkoto predstavi s pomočjo treh funkcij

$$q_1(t), \quad q_2(t), \quad q_3(t).$$

Komponente hitrosti $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ lahko sedaj zapišemo s pomočjo odvodov $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \frac{dq_3}{dt}$!

To zapišemo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_3} \frac{dq_3}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial y}{\partial q_3} \frac{dq_3}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial z}{\partial q_3} \frac{dq_3}{dt} \end{aligned} \tag{61}$$

Enačbe sistema (57) sedaj po vrsti zmnožimo z $\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}$ in $\frac{\partial z}{\partial q_1}$, nakar jih seštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) &= \\ = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_1} &= \\ = - \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}. \end{aligned}$$

Ostane nam še preoblikovanje prvega člena

$$\begin{aligned}
m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) &= m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \\
&- m \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)}{\partial q_1} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)}{\partial q_1} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dz}{dt} \right)}{\partial q_1} \right) = \\
&= \frac{d}{dt} m \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)}{\partial \left(\frac{dq_1}{dt} \right)} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)}{\partial \left(\frac{dq_1}{dt} \right)} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dz}{dt} \right)}{\partial \left(\frac{dq_1}{dt} \right)} \right) \\
&- m \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)}{\partial q_1} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)}{\partial q_1} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dz}{dt} \right)}{\partial q_1} \right),
\end{aligned}$$

kjer nam je sistem (61) omogočil relacije

$$\frac{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)}{\partial \left(\frac{dq_1}{dt} \right)} = \frac{\partial x}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)}{\partial \left(\frac{dq_1}{dt} \right)} = \frac{\partial y}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial \left(\frac{dz}{dt} \right)}{\partial \left(\frac{dq_1}{dt} \right)} = \frac{\partial z}{\partial q_1}.$$

Po drugi strani nas izraz za kinetično energijo

$$E_k = \frac{1}{2} m \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\}$$

pripelje do relacij

$$\frac{\partial E_k}{\partial \left(\frac{dq_1}{dt}\right)} = m \left\{ \frac{dx}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial \left(\frac{dq_1}{dt}\right)} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial \left(\frac{dq_1}{dt}\right)} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial \left(\frac{dq_1}{dt}\right)} \right\}$$

in

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_1} = m \left\{ \frac{dx}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dx}{dt}\right)}{\partial q_1} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dy}{dt}\right)}{\partial q_1} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \left(\frac{dz}{dt}\right)}{\partial q_1} \right\}$$

s katerima lahko začetno relacijo zapišemo v obliki

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \left(\frac{dq_k}{dt}\right)} - \frac{\partial E_k}{\partial q_k} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, 3.$$

Vpeljimo še Lagrangeovo funkcijo

$$L = E_k - \varphi$$

in dobimo generalizirane Lagrangeove enačbe

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_k}{dt}\right)} = \frac{\partial L}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, 3.$$

Zdaj se vrnemo k začetnemu vprašanju: ali posplošitev (po poglobitvi) vsebuje začetno preprostost?

Vzemimo Descartesove koordinate in preverimo!

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z$$

Odvajamo po x in $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} m \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} = 0$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)} = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)} \frac{1}{2} m \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} = m \frac{dx}{dt}$$

Lagrangeove enačbe postanejo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)} - \frac{\partial E_k}{\partial x} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

s čemer potrdimo: da! Newton je imel prav! Zares. Vse "štima", kakor se spodobi!